

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ KYVADLO

MATHEMATICAL PENDULUM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

BARBORA KUČEROVÁ

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. JAN FRANČŮ, CSc.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Barbora Kučerová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické kyvadlo

v anglickém jazyce:

Mathematical pendulum

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pohyb matematického kyvadla popisuje nelineární diferenciální rovnice $y'' + \sin y = 0$. Složitější modely umožňují popisovat chování kyvadla s buzení nebo tlumením, s kmitajícím závěsem, kyvadla v prostoru, kyvadel spojených paralelně nebo seriově.

Cíle bakalářské práce:

Odvodit rovnice, výpočet trajektorií řešení, jejich interpretace, klasifikace singulárních řešení, vykreslení fázového portréту u základního modelu. Případně se zabývat i zobecněnými situacemi kyvadla nebo soustavy kyvadel.

Seznam odborné literatury:

Carmen Chicone: Ordinary differential equations with applications

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 4.11.2009

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním chování matematického kyvadla. Cílem této práce je odvodit rovnice matematického kyvadla, vypočítat trajektorie řešení a interpretovat jejich význam, klasifikovat singulární řešení, vykreslit fázový portrét v softwaru MATLAB a to jak u základního modelu, tak i u zobecněných případů kyvadla s tlumením a buzením.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematické kyvadlo, autonomní systémy, fázový portrét řešení

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with the mathematical modeling of the behaviour of mathematical pendulum. The aim of this thesis is to find the equation of mathematical pendulum, compute the trajectories of solution and interpret their meaning, classify the singular solution, plot the phase portrait in MATLAB software for the basic model and for the generalized model of the damped and driven pendulum.

KEYWORDS

Mathematical pendulum, autonomous systems, phase portrait of solution

KUČEROVÁ, B. *Matematické kyvadlo*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2010. 34 s. Vedoucí práce byl prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematické kyvadlo* vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Jana Franců, CSc., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Barbora Kučerová

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Janovi Franců, CSc. za vedení mé bakalářské práce, mnohé rady a připomínky, které pomohly ke zlepšení obsahové stránky této práce.

Barbora Kučerová

OBSAH

Seznam symbolů, veličin a zkratk	8
1 Rovinné matematické kyvadlo	10
1.1 Odvození rovnice	10
1.2 Řešení rovnice matematického kyvadla	13
2 Rovinné matematické kyvadlo s tlumením	19
2.1 Viskózní tlumení	19
3 Rovinné matematické kyvadlo s buzením a s tlumením	21
A Autonomní systémy	30
B Zdrojový kód použitého programu	33
Literatura	34

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$F [N]$	síla působící na hmotný bod
$m [kg]$	hmotnost hmotného bodu
$a [m \cdot s^{-2}]$	zrychlení hmotného bodu
$l [m]$	délka tyče
ΔU	změna potenciální energie
ΔK	změna kinetické energie
$\Delta h [m]$	výška, rozdíl výšek
$t [s]$	čas
$v [m \cdot s^{-1}]$	rychlost
$\dot{\varphi} [rad \cdot s^{-1}]$	úhlová rychlost
$x_0 [rad]$	počáteční úhel
$x [rad]$	úhel
$h_0, h_1 [m]$	svislá vzdálenost hmotného bodu od závěsu
$\omega_0 [rad \cdot s^{-1}]$	vlastní frekvence kyvadla
$E [J]$	mechanická energie
$\gamma [N \cdot s \cdot m^{-1}]$	tlumící konstanta
$A [N]$	amplituda budící síly
$\omega_D [rad \cdot s^{-1}]$	úhlová frekvence budící síly

ÚVOD

Matematické kyvadlo je idealizovaným modelem reálného kyvadla. Tento model se skládá z nehmotné, neroztažitelné tyče, na které je zavěšen hmotný bod. Tyč je připevněna k závěsu, u kterého zanedbáváme tření. Pohyb matematického kyvadla popisuje nelineární diferenciální rovnice $\ddot{x} + \sin x = 0$.

V případě malého úhlu lze pohyb popsat lineární diferenciální rovnicí $\ddot{x} + x = 0$. V případě velkého úhlu dochází k řadě jevů, které nejsou popsány lineární diferenciální rovnicí. Periody kmitů se zvětšují, v limitním případě je doba kmitu nekonečně dlouhá. Jestliže je energie dodaná kyvadlu velká, dochází k otáčení kyvadla kolem závěsu.

První kapitola se věnuje obecnému modelu rovinného matematického kyvadla. Odvodíme zde rovnici matematického kyvadla pomocí silové rovnováhy a pomocí zákona zachování mechanické energie. Pro linearizovaný i nelineární případ vykreslíme fázové portréty, popíšeme trajektorie řešení a klasifikujeme singulární řešení.

Druhá kapitola řeší případ rovinného matematického kyvadla s tlumením, pro který uvedeme pohybovou rovnici, vykreslíme fázový portrét a klasifikujeme singulární body.

Ve třetí kapitole popíšeme případ rovinného matematického kyvadla s tlumením a buzením. V tomto případě není diferenciální rovnice autonomní, proto je klasifikace trajektorií tohoto systému složitá.

1 ROVINNÉ MATEMATICKÉ KYVADLO

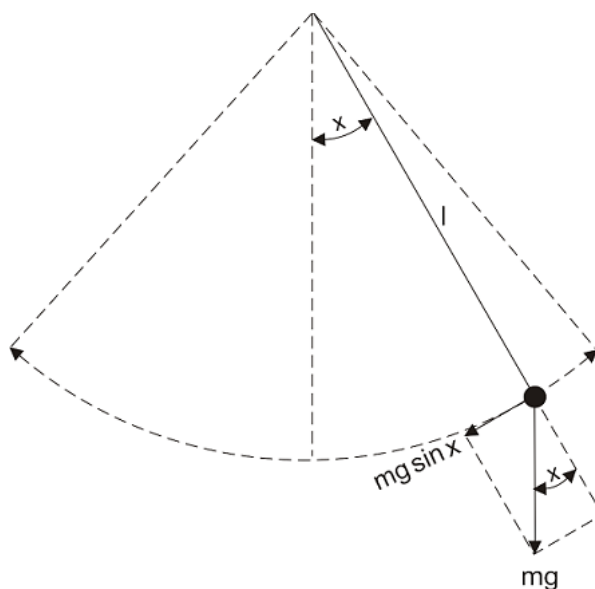
Matematické kyvadlo je idealizovaným modelem kyvadla. Předpokládáme, že jde o hmotný bod, který je zavěšený na nehmotné, neroztažitelné tyči, a zanedbáváme odpor okolí a tření v závěsu.

Více o odvození vztahů pro výpočet trajektorií a popis fázových portrétů lze nalézt v [2] a [5].

1.1 Odvození rovnice

V základním případě budeme modelovat situaci, kdy matematické kyvadlo po dodání počáteční energie volně kmitá bez vnějšího působení.

Odvození pomocí silové rovnováhy



Obr. 1.1: Rovnováha sil působících na hmotný bod

Polohu kyvadla popisuje funkce $x(t)$, úhel, který svírá tyč se svislým směrem, viz obr. 1.1, v proměnné t , kde t je čas.

Na hmotný bod kyvadla působí tíhová síla, kterou rozložíme na složky, z nichž jedna je kolmá a druhá je rovnoběžná s okamžitým směrem pohybu hmotného bodu. Směr okamžité rychlosti je tečna k oblouku opisovaného hmotným bodem. Podle Newtonova druhého zákona platí

$$F = ma,$$

kde F je součet sil působících na hmotný bod, m je hmotnost a a je okamžité zrychlení hmotného bodu. Na hmotný bod působí jen tíhová síla a tahová síla tyče, hmotný bod je udržován ve stejné vzdálenosti od závěsu. Proto aplikujeme Newtonovu rovnici pouze na tečnou složku gravitační síly. Velikost této složky určíme pomocí trigonometrie, pak

$$F = -mg \sin x = ma, \quad a = -g \sin x,$$

kde g je tíhové zrychlení. Záporné znaménko na pravé straně ukazuje na rozdílný směr úhlu x a tečné složky síly F . To je způsobeno tím, že když se kyvadlo pohybuje doleva, síla ukazuje doprava a naopak. Zrychlení a souvisí se změnou úhlu x podle vzorce obloukové délky, s je oblouková délka

$$s = lx, \tag{1.1}$$

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$v = l \frac{dx}{dt},$$

$$a = l \frac{d^2x}{dt^2},$$

potom

$$l \frac{d^2x}{dt^2} = -g \sin x.$$

Označíme-li $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

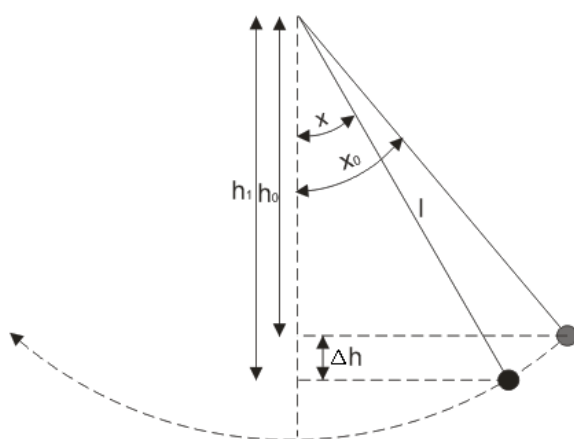
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin x = 0. \tag{1.2}$$

Konstanta $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ se nazývá vlastní frekvence kyvadla.

Odvození pomocí zákona zachování mechanické energie

Rovnici pohybu matematického kyvadla můžeme získat i ze zákona zachování mechanické energie. Při přemístění hmotného bodu o výšku Δh dolů, potenciální energie klesne o hodnotu $mg\Delta h$. Přemění se na kinetickou energii. Změna potenciální energie je dána vztahem

$$\Delta U = mg\Delta h,$$



Obr. 1.2: Trigonometrie prostého matematického kyvadla

změna kinetické energie je dána vztahem

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ze zákona zachování energie se změna kinetické a změna potenciální energie rovnají

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mg\Delta h, \\ v &= \sqrt{2g\Delta h}. \end{aligned}$$

S použitím vzorce pro obloukovou délku (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\ell} \sqrt{2g\Delta h}. \quad (1.3)$$

Jestliže se kyvadlo začne kývat z nějakého počátečního úhlu x_0 , potom h_0 , počáteční svislá vzdálenost od závěsu, je dána rovnicí

$$h_0 = \ell \cos x_0,$$

podobně pro x_1

$$h_1 = \ell \cos x,$$

potom Δh je rozdíl těchto dvou výšek

$$\Delta h = \ell (\cos x - \cos x_0).$$

Dosazením tohoto do (1.3)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos x - \cos x_0)}.$$

Tato rovnice je známá jako první pohybový integrál, který vyjadřuje rychlost na základě polohy a obsahuje integrační konstanty závislé na iniciačním úhlu x_0 . Derivováním získáme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos x - \cos x_0)}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{-(2g/\ell) \sin x}{\sqrt{(2g/\ell) (\cos x - \cos x_0)}} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{-(2g/\ell) \sin x}{\sqrt{(2g/\ell) (\cos x - \cos x_0)}} \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos x - \cos x_0)}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell} \sin x. \end{aligned}$$

Označením $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ dostáváme výslednou rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin x = 0. \quad (1.4)$$

Rovnice (1.4) je stejná diferenciální rovnice jako (1.2), kterou jsme získali ze silové rovnováhy.

1.2 Řešení rovnice matematického kyvadla

Diferenciální rovnice (1.2) není řešitelná elementárními funkcemi. Proto často používáme linearizaci, při které se omezujeme na malý úhel x .

Linearizovaný případ

Za předpokladu, že úhel x je malý, můžeme psát

$$\sin x \approx x.$$

Dosazením do rovnice (1.2) se případ zjednoduší na lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.5)$$

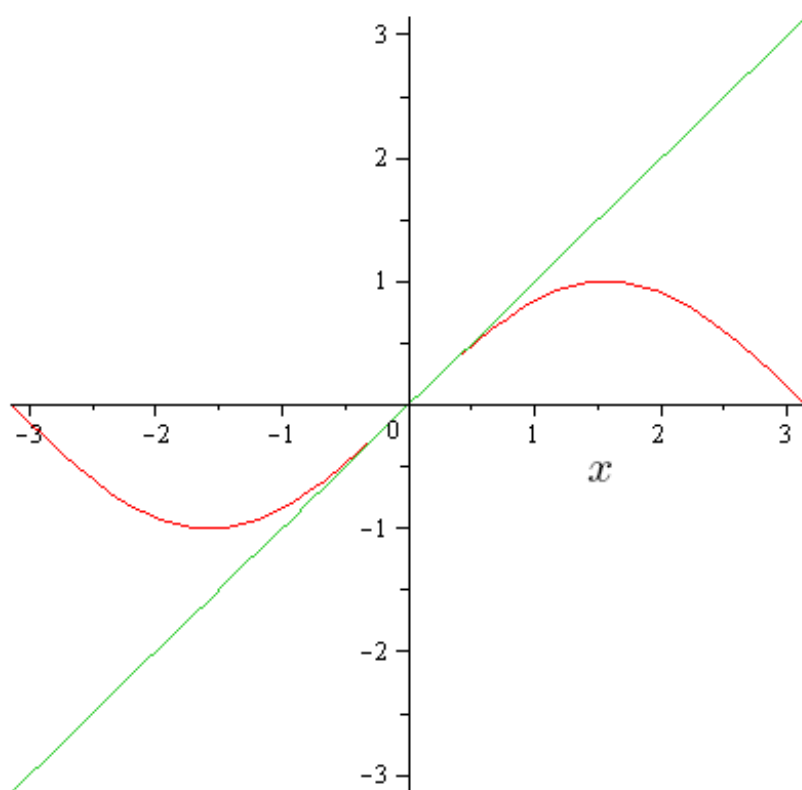
Obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t).$$

S počátečními podmínkami $x(0) = x_0$ a $dx/dt(0) = 0$ je řešení

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad x_0 \ll 1.$$

Z výsledku vidíme, že perioda kyvadla nezávisí na amplitudě kmitání.

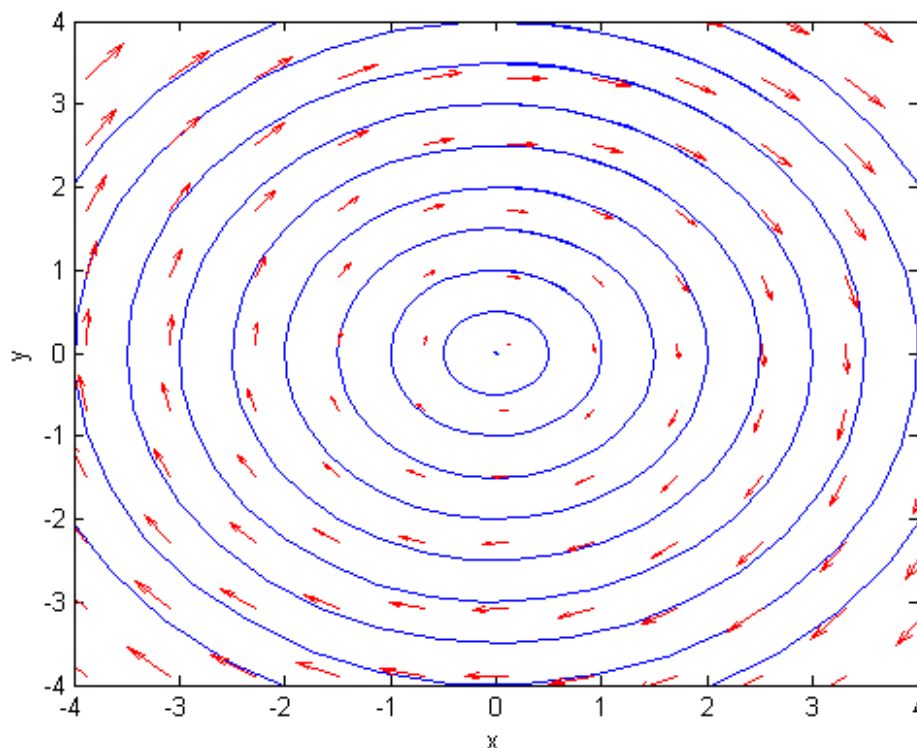


Obr. 1.3: Graf funkce $\sin x$ a lineární funkce x

Aproximace $\sin x \approx x$ je vyhovující do $\frac{\pi}{4}$, viz obr. 1.3. Při větším úhlu x se lineární funkce a funkce $\sin x$ řešením rozcházejí.

Řešení rovnice druhého řádu se znázorňuje tzv. fázovým portrétem, kde situaci v čase t znázorňuje dvojice: úhel x a úhlová rychlost $y = \dot{x}$.

Trajektorie jsou uzavřené orbity obklopující singulární trajektorii, bod $(0, 0)$, který odpovídá rovnovážnému stavu, kdy $x = 0$ a $y = \dot{x} = 0$. Tento bod je stabilním řešením rovnice (1.5) a je singulárním řešením typu střed, viz obr. 1.4.



Obr. 1.4: Fázový portrét linearizované diferenciální rovnice

Řešení nelineární rovnice

V případě, že úhel x není malý, musíme studovat nelinearizovanou rovnici pohybu matematického kyvadla (1.2). Řešení rovnice nelze explicitně vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Lze odvodit vztah mezi rychlostí a úhlem, který určí trajektorie řešení.

Rovnici $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$, kde $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, vynásobíme \dot{x}

$$\ddot{x} \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \sin x \cdot \dot{x} = 0,$$

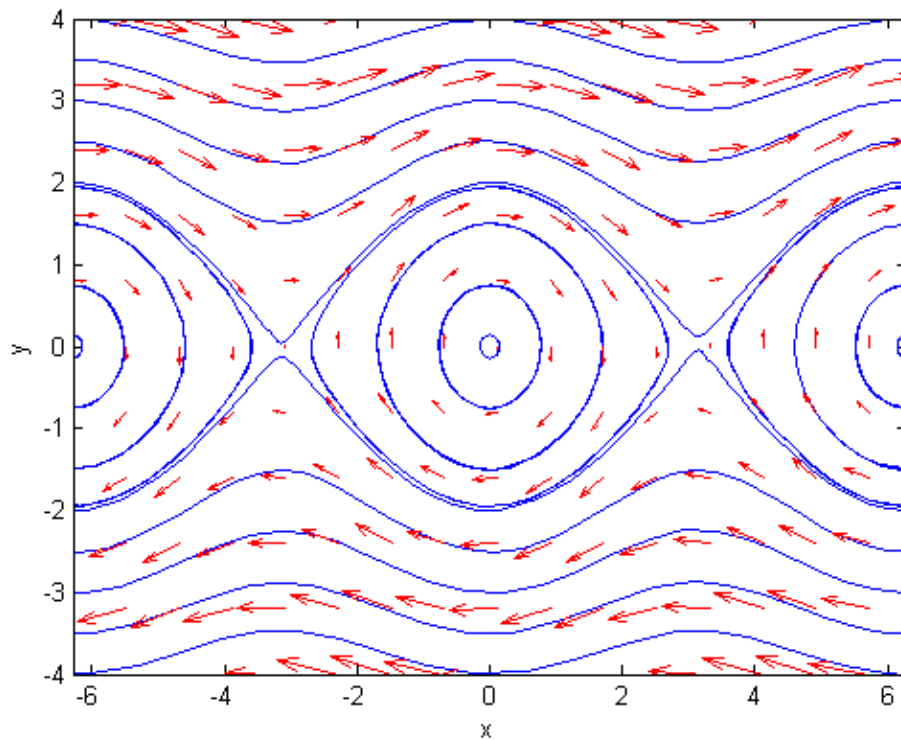
zapíšeme ve tvaru

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x = 0. \quad (1.6)$$

Rovnici (1.6) zintegrujeme

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{x}^2 - m g l \cos x. \quad (1.7)$$

To je formulace zákona zachování mechanické energie E , kde první člen představuje kinetickou energii a druhý člen potenciální energii. Systém, ve kterém platí zákon zachování mechanické energie, se nazývá konzervativní. Trajektorie jsou křivky konstantní energie. Systém je autonomní, viz příloha A.



Obr. 1.5: Fázový portrét nelinearizované diferenciální rovnice

Z (1.7) vyjádříme rychlost

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l} \cos x}.$$

Pro různé hodnoty energie E dostáváme různé chování kyvadla, viz obr. 1.5:

- pro $E > mgl$ trajektorie leží pod nebo nad osou x .
- pro $-mgl < E < mgl$ tvoří křivky uzavřené orbity.
- pro $E < -mgl$ neexistuje reálné řešení, což odpovídá faktu, že kyvadlo má vždy potenciální energii nejméně $-mgl$, proto $E \geq -mgl$.

Každé řešení (1.2) je reprezentováno trajektoriemi fázového portréту:

Rovnovážná řešení se nacházejí na vodorovné ose, které odpovídá nulová úhlová rychlost $\dot{x} = 0$.

Jsou to středy v místech $x = 2k\pi$, $k = 0, 1, -1, \dots$. V těchto místech má kyvadlo minimální potenciální energii. Malá perturbace vede k periodickému řešení, které je blízké rovnovážnému stavu. Středy jsou stabilními rovnovážnými body.

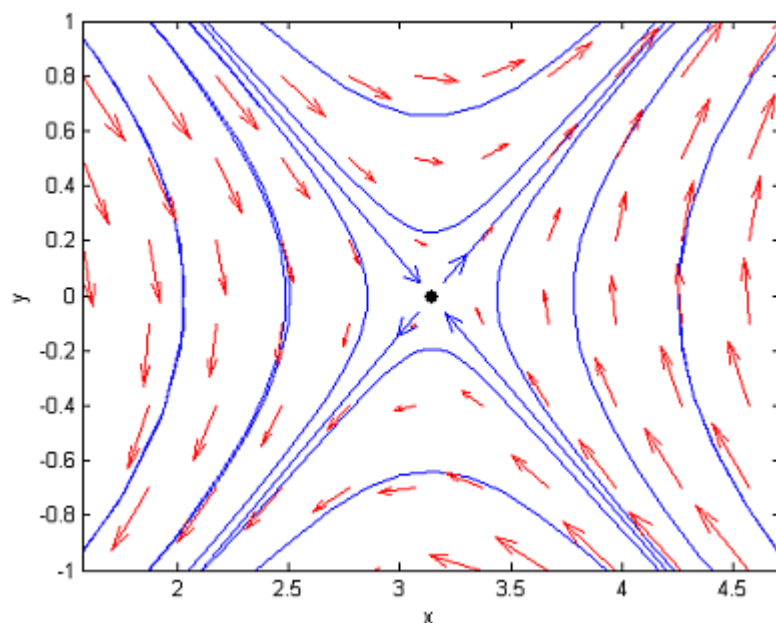
Dále jsou to sedlové body, viz obr. 1.6, v místech $x = (2k + 1)\pi$. Sedlové body jsou místem, kde má kyvadlo maximální potenciální energii a nachází se v klidu. Tyto body jsou nestabilní, malá perturbace vede k řešení vzdále-

němu od rovnovážného stavu.

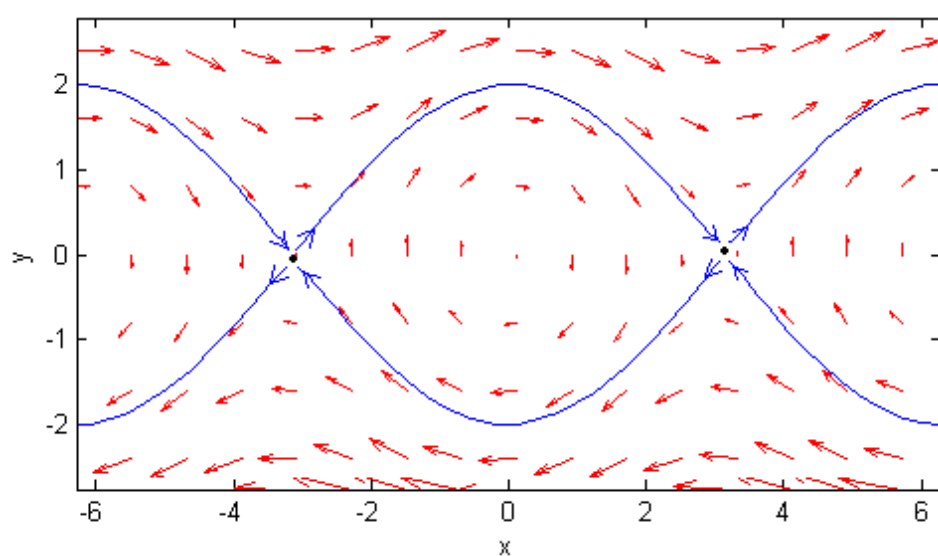
Periodická řešení - trajektorie s energií $-mgl < E < mgl$ tvoří uzavřené cykly, viz obr. 1.9. Označují se jako periodické orbity. Tyto orbity jsou stabilní. Hmotný bod se kýve, aniž by dosáhl vrcholu.

Periodická řešení - trajektorie s energií $E > mgl$ jsou také stabilní periodická řešení. Trajektorie tvoří otevřené křivky, viz obr. 1.8, ale periodický pohyb vykonává hmotný bod otáčející se kolem závěsu.

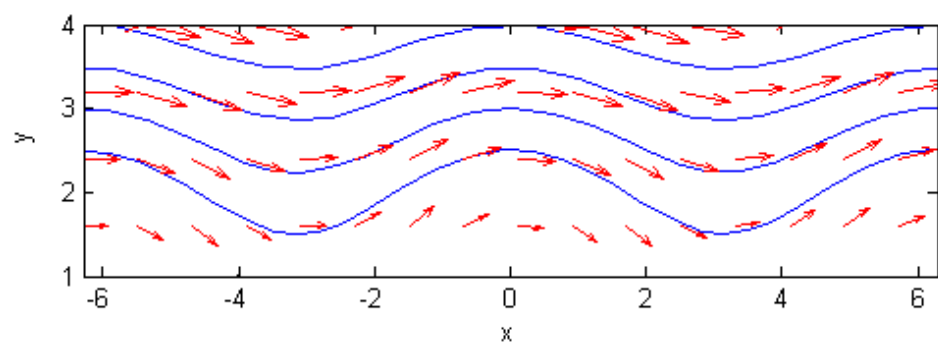
Heteroklinická řešení jsou trajektorie s energií $E = mgl$. Pro tyto trajektorie platí, že $x \rightarrow \pm(2k+1)\pi$ pro $t \rightarrow \pm\infty$, kyv v tomto případě trvá nekonečně dlouho, viz obr. 1.7. Tyto trajektorie jsou významné, protože rozdělují fázový prostor na oblasti s rozdílným chováním kyvadla, tedy na oblast, v níž se kyvadlo kýve, a na oblast, kde se kyvadlo otáčí. Proto bývají zároveň označovány i jako separatrixy.



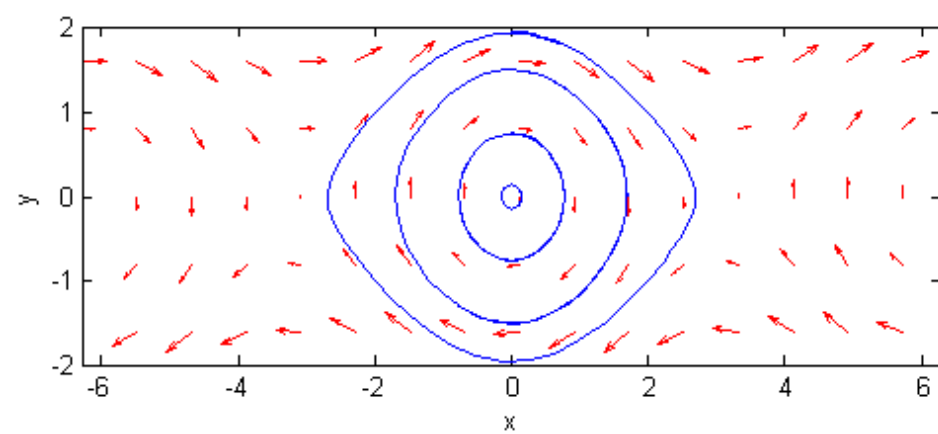
Obr. 1.6: Sedlový bod



Obr. 1.7: Heteroklinické trajektorie



Obr. 1.8: Otevřené trajektorie



Obr. 1.9: Uzavřené trajektorie

2 ROVINNÉ MATEMATICKÉ KYVADLO S TLUMENÍM

Rovnice (1.2) popisuje pohyb kyvadla ovlivněného pouze tíhovou silou. Ve skutečnosti ale dochází vždy ke ztrátám energie a tím k tlumení.

Více o odvození vztahů pro výpočet trajektorií a popis fázových portrétů lze nalézt v [2] a [5].

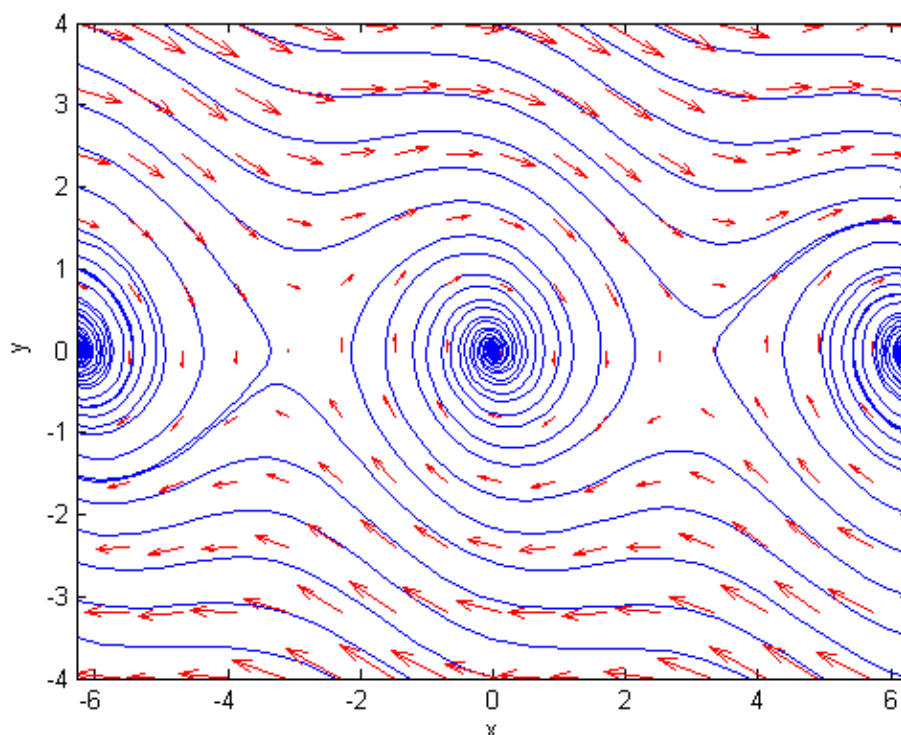
2.1 Viskózní tlumení

Předpokládáme, že tlumicí síla je úměrná rychlosti $\frac{dx}{dt}$. Tlumicí síla působí proti pohybu kyvadla, což určuje znaménko nového členu rovnice. Rovnice pohybu pak je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin x = 0,$$

kde γ je tlumicí konstanta. Modelem viskózního tlumení je například olej v ložisku působící na závěs kyvadla.

Systém s tlumením není konzervativní, rovnice ale zůstává autonomní.



Obr. 2.1: Fázový portrét matematického kyvadla s viskózním tlumením

Fázový portrét kyvadla s tlumením, obr. 2.1, se od netlumeného kyvadla liší tím, že středy se změnilly na stabilní ohniska a směřují do nich téměř všechny trajektorie. Zanikly také uzavřené a otevřené trajektorie. Jediné trajektorie, které nesměřují do ohnisek jsou trajektorie blížící a vzdalující se sedlu. Tyto trajektorie rozdělují fázový portrét na oblasti přitažlivosti jednotlivých ohnisek.

3 ROVINNÉ MATEMATICKÉ KYVADLO S BUZENÍM A S TLUMENÍM

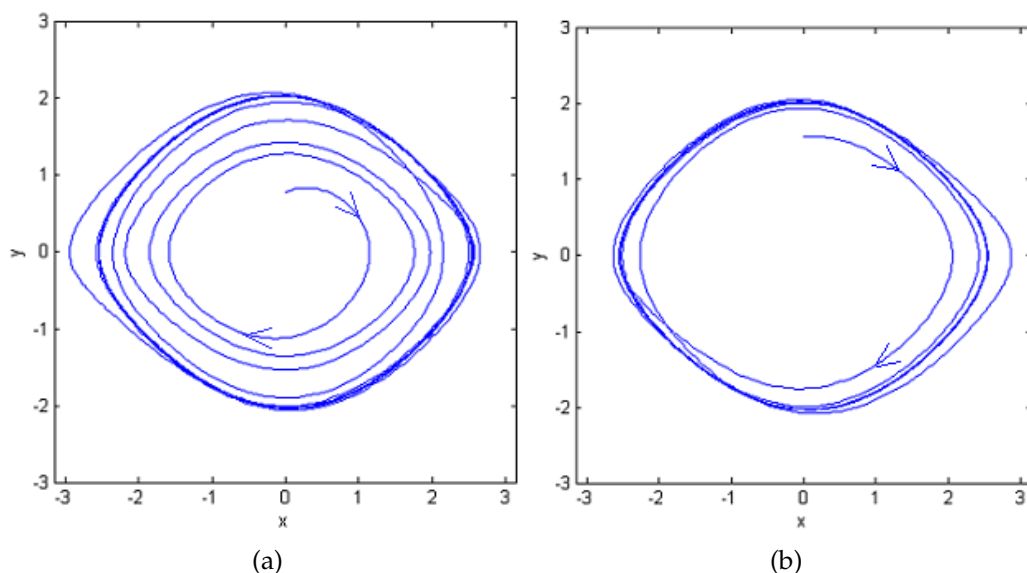
V poslední kapitole stručně načrtneme situaci, kdy na kyvadlo působí harmonická budící síla. Více o případě rovinného matematického kyvadla s tlumením a buzením lze nalézt v [1], [3] a [5].

Pohybová rovnice matematického kyvadla s viskózním tlumením a s periodickým buzením je pak tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin x = A \cos \omega_D t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

kde A je amplituda budící síly, ω_D je úhlová frekvence budící síly a $\varphi = \omega_D t$ je fáze budící síly. Tato rovnice je bezrozměrná. Systém už není autonomní.

Situaci kyvadla s buzením můžeme úplně popsat tím, že k x a $y = \dot{x}$ přidáme fázi φ budící síly. V tomto rozšířeném fázovém portrétu jsou trajektorie disjunktní, zatímco ve fázovém portrétu tvořeném dvojicí x a $y = \dot{x}$ se protínají. Tvar fázového portréту trajektorií kyvadla s buzením a tlumením závisí na třech řídicích parametrech rovnice: γ , A , ω_D .



Obr. 3.1: Trajektorie pro parametry $\omega = 2/3$, $A = 0.5$, $\gamma = 0.25$. Obrázky se liší počátečními podmínkami, ale v obou případech se systém ustálí na stejném limitním cyklu.

Limitní množiny

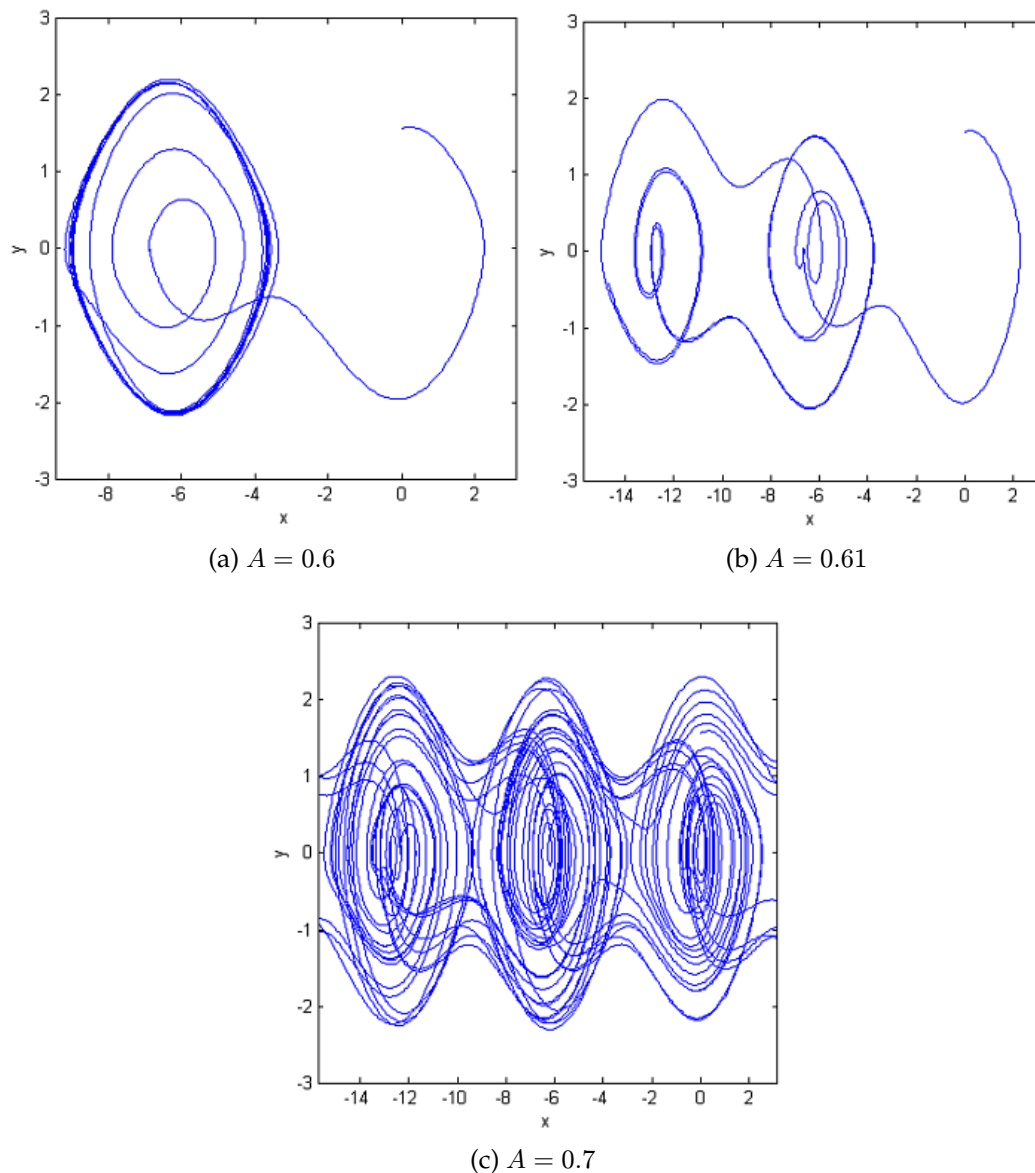
Limitní množiny jsou důležité, protože nám pomáhají pochopit dlouhodobé chování dynamického systému. Více o limitních množinách lze nalézt v [3].

DEFINICE 3.1 Řekneme, že $(x_\omega, y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ je ω -limitní bod právě tehdy, když existuje řešení $x(t)$ rovnice a rostoucí posloupnost $t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, že $[x(t_k), \dot{x}(t_k)] \rightarrow (x_\omega, y_\omega)$. Řekneme, že $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ je α -limitní bod právě tehdy, když existuje řešení $x(t)$ rovnice a rostoucí posloupnost $t_k \rightarrow -\infty, k \rightarrow \infty$, že $[x(t_k), \dot{x}(t_k)] \rightarrow (x_\alpha, y_\alpha)$.

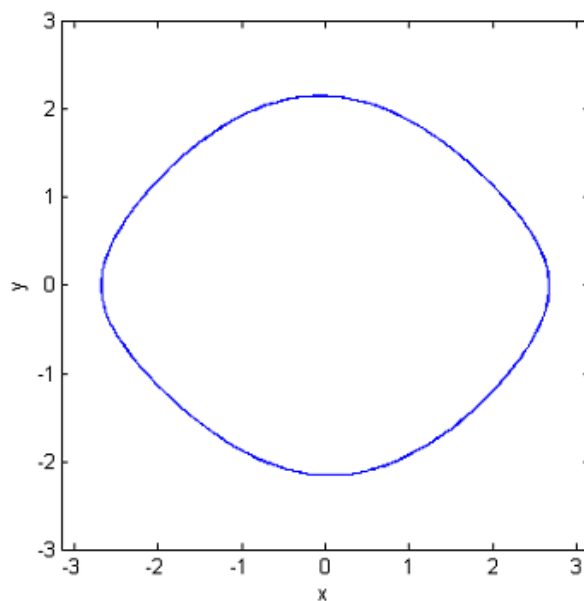
Na rozdíl od autonomních systémů, kde limitní množiny nabývají podoby periodických orbit nebo pevných bodů a tudíž jsou pro studium poměrně nezajímavé, u neautonomních systémů s buzením může nastávat kromě těchto případů navíc ještě případ chaotického atraktoru a limitních cyklů.

Pro zmapování celého systému matematického kyvadla s viskózním tlumením a periodickým buzením by bylo potřeba vykreslit fázové portréty pro všechny hodnoty řídicích parametrů: γ, A, ω_D , což by bylo nemožné. Proto při řešení přijmeme omezení:

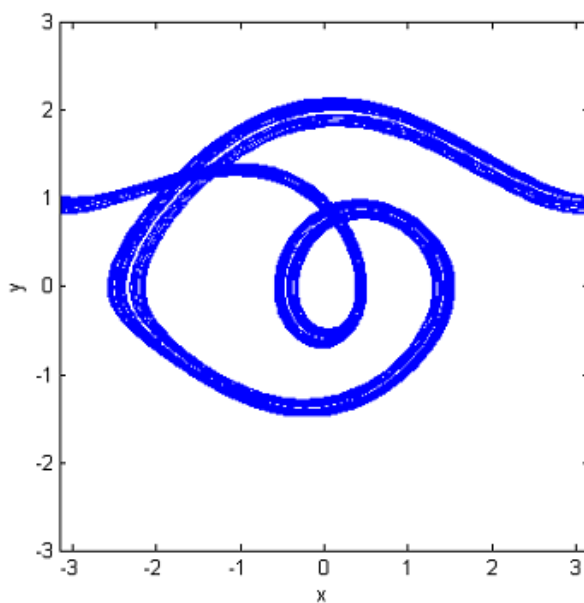
1. Abychom omezili zobrazení vývoje systému, provedeme projekci proměnné x na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, což lze, protože stavy s hodnotou $x + 2k\pi, k = 0, 1, -1 \dots$ lze pokládat za totožné a další vývoj systému nezávisí na hodnotě k .
2. Vývoj systému budeme posuzovat na jediném proměnném parametru A . Zbývající dvě proměnné γ a ω_D jsou brány jako konstantní parametry a jejich hodnoty zvolíme následujícím způsobem: v bezrozměrném tvaru je vlastní frekvence linearizovaného oscilátoru (bez tlumení a pro malé kmity) $\omega_0 = 1$. Frekvenci budící síly zvolíme srovnatelnou, ale nikoli stejnou, abychom vyloučili rezonanci, $\omega_D = 2/3$. Při rezonanci se systém ustálí v limitním cyklu s jednoduchým periodickým průběhem. Hodnotu tlumící konstanty $\gamma = 0,25$ určíme takovou, aby budící síla nemusela být příliš velká.
3. Části trajektorií, při kterých se systém ustaluje do limitních cyklů, vynecháme.



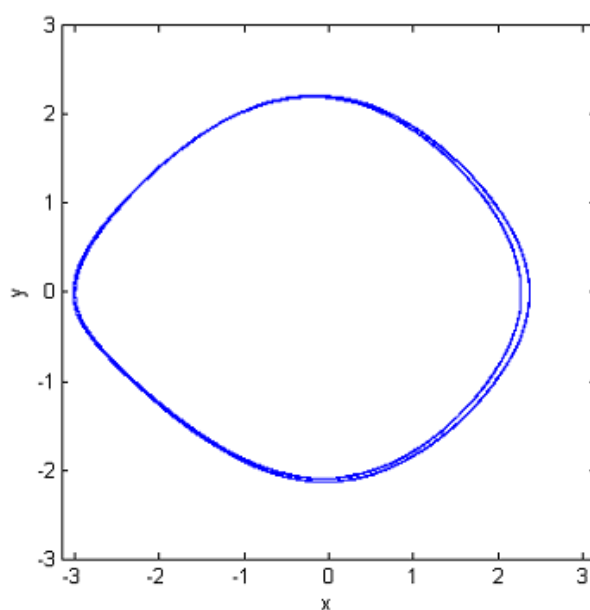
Obr. 3.2: Příklad fázových portrétů vykreslených bez omezujících předpokladů. Chování buzeného matematického kyvadla v závislosti na amplitudě budící síly: systém s amplitudou $A = 0.6$ se stejně jako na obr. 3.1 ustálil v limitním cyklu. Také systém s amplitudou $A = 0.61$ se ustálil v limitním cyklu s poměrně složitým průběhem. Systém s amplitudou $A = 0.7$ ale chaoticky kmitá. Jestliže dosáhne stavu připomínajícího limitní cyklus, opět jej po určité době opustí.



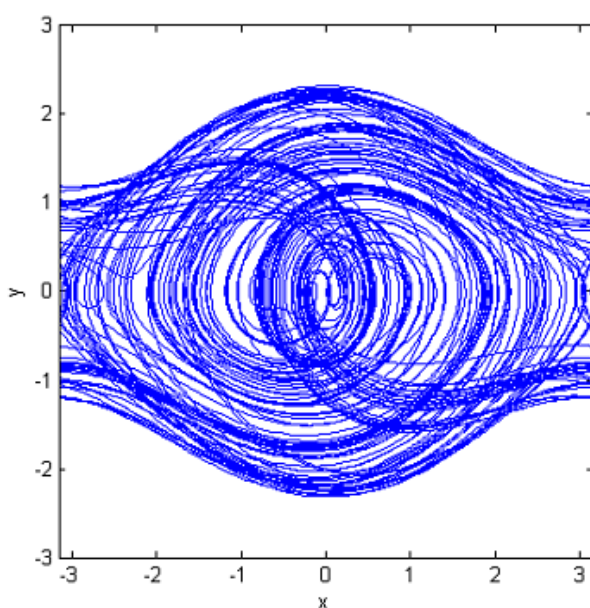
Obr. 3.3: Systém s amplitudou $A = 0.6$. Pro malou amplitudu budící síly koná kyvadlo jednoduchý periodický pohyb, který tvoří limitní cyklus.



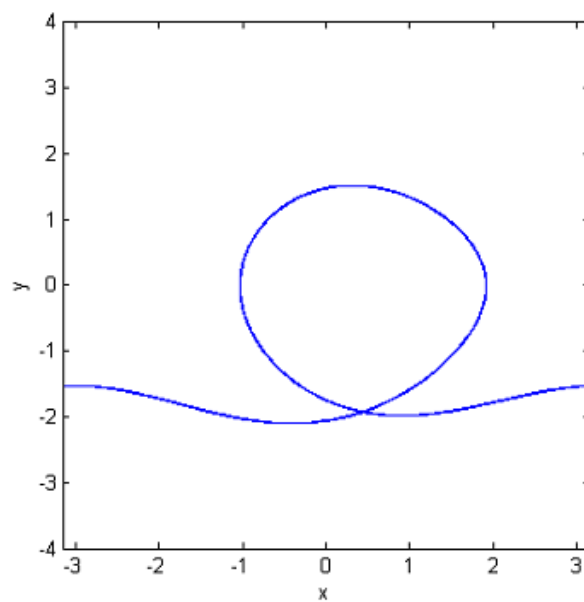
Obr. 3.4: Systém s amplitudou $A = 0.65$. Pohyb systému je kvaziperiodický. Zatímco periodické chování je chování opakující se v pravidelných intervalech, kvaziperiodický pohyb je opakující se pohyb se složkou nepředvídatelnosti, kvůli které se nehodí k přesnému měření.



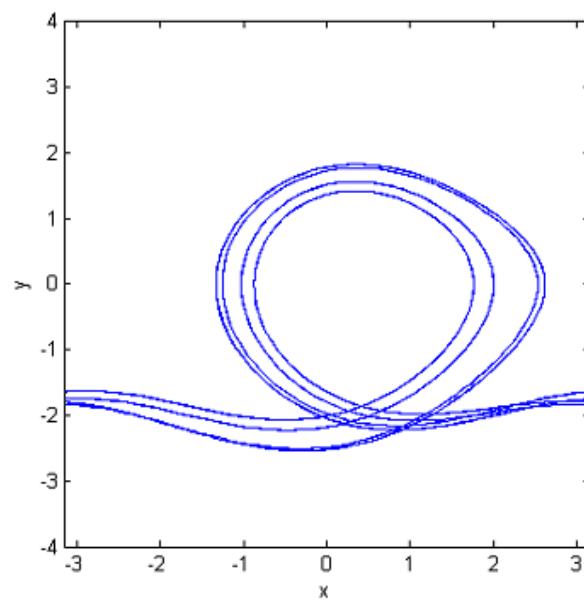
Obr. 3.5: Systém s amplitudou $A = 0.66$. Trajektorii pohybu tvoří uzavřená křivka s dvěma smyčkami. Systém se opět ustálil v limitním cyklu.



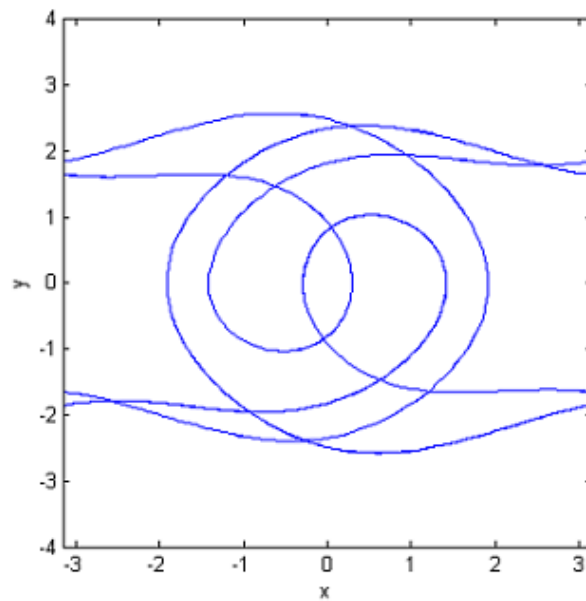
Obr. 3.6: Systém s amplitudou $A = 0.7$. Mnoho nelineárních systémů vykonává chaotický pohyb. V chaotických systémech se trajektorie neustálí v limitním cyklu nebo jiné opakující se struktuře a pokud ano, tak ji po nějaké době opět opustí. Navíc jsou řešení velmi citlivá na počáteční podmínky, takže i když jsou počáteční podmínky v čase $t = 0$ velmi blízké, v relativně krátkém čase jsou řešení velmi vzdálená. To dělá řešení nepředvídatelným.



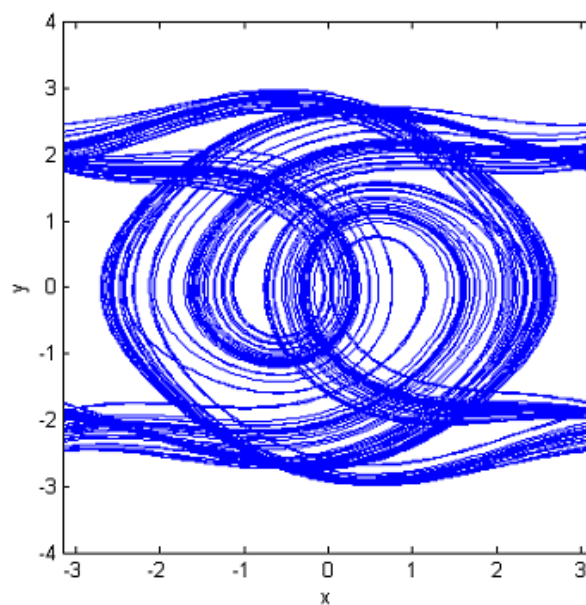
Obr. 3.7: Systém s amplitudou $A = 0.92$. Trajektorie se ustálí v limitním cyklu. Pohyb matematického kyvadla koná jednonásobné otočení.



Obr. 3.8: Systém s amplitudou $A = 1$. Limitní množina je periodická, v systému nastávají čtyři různá otočení.



Obr. 3.9: Systém s amplitudou $A = 1.2$. Pohyb kyvadla charakterizuje dvojnásobné otočení a dvojnásobný kyv. Jedná se o limitní cyklus se složitějším průběhem.



Obr. 3.10: Systém s amplitudou $A = 1.3$. Systém podobný systému s amplitudou $A = 1.2$. Limitní množina není kvaziperiodická, pouze dochází k mnohonásobnému kyvu a otočení.

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo matematické modelování chování matematického kyvadla a jeho zobecněných případů: matematického kyvadla s tlumením a matematického kyvadla s tlumením a buzením.

Při řešení těchto případů byly použity diferenciální rovnice, které se používají při řešení mnoha fyzikálních, biologických a technických problémů. Speciálním případem diferenciálních rovnic jsou pak autonomní rovnice, které popisují chování rovinného matematického kyvadla a rovinného matematického kyvadla s tlumením. Autonomní systémy jsou nezávislé na čase a proto můžeme ze zjištěných výsledků vytvořit model popisující chování matematického kyvadla.

Pro systém rovinného matematického kyvadla bez tlumení a buzení jsme odvodili pohybové rovnice pomocí silové rovnováhy a pomocí zákona zachování mechanické energie. Výslednou rovnici jsme poté vyřešili pro malý úhel. Pro větší úhel nelze řešení rovnice explicitně vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Proto jsme odvodili vztah mezi rychlostí a úhlem. Systém matematického kyvadla je konzervativní, trajektorie jsou tedy křivky konstantní energie. Tyto trajektorie jsme vykreslili ve fázovém portréту řešení a klasifikovali je. Ve fázovém portrétu se vyskytují tři typy trajektorií: otevřené, neprotínající se křivky, uzavřené křivky a singulární body.

Pro případ matematického kyvadla s tlumením jsme určili pohybovou rovnici. Tato rovnice už není konzervativní, ale opět je autonomní. Fázový portrét se oproti fázovému portrétu matematického kyvadla bez tlumení změnil. Zanikly otevřené a uzavřené křivky. Středky se změnilly na stabilní ohniska a směřují do nich téměř všechny trajektorie. Jediné trajektorie, které nesměřují do ohnisek jsou trajektorie blížící a vzdalující se sedlu.

Oproti tomu pohybová rovnice matematického kyvadla s tlumením a buzením už není autonomní. Situaci kyvadla s buzením můžeme úplně popsat tím, že k x a $y = \dot{x}$ přidáme fázi φ budící síly. V tomto rozšířeném fázovém portrétu jsou trajektorie disjunktní, zatímco ve fázovém portrétu tvořeném dvojicí x a $y = \dot{x}$ se protínají. Tvar tohoto fázového portrétu závisí na třech řídicích parametrech rovnice: γ , A , ω_D . Abychom mohli popsat systém matematického kyvadla s viskózním tlumením a periodickým buzením, přijali jsme při řešení omezení, díky kterým jsme mohli vykreslit fázové portréty pro dané řídicí parametry a na jejich základě určit chování systému, které je pro rozdílné amplitudy budící síly A jak periodické, tak i chaotické.

Pro případ rovinného matematického kyvadla a rovinného matematického kyvadla s tlumením byly metody řešení postačující. Pro lepší modelování rovinného matematického kyvadla s tlumením a buzením by bylo potřeba využít

dalších prostředků teorie nelineárních dynamických systémů, např. Poincarého mapy. Poincarého mapa je rovinným řezem fázového prostoru, nedochází na ní při projekci k překrývání částí trajektorie, jako je tomu u projekce trajektorie. Díky této vlastnosti se dobře hodí k identifikaci limitní množiny.

Účelem práce bylo sjednocení poznatků z jednotlivých literárních pramenů a jejich následné využití při vykreslení a popisu fázových portrétů v softwaru MATLAB.

A AUTONOMNÍ SYSTÉMY

Soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (A.1)$$

kde vektorová funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definovaná a spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, nazveme autonomním systémem. Budeme předpokládat, že f je spojitá funkce a že počáteční úloha (A.1) s podmínkou $x(t_0) = x_0$ má právě jedno řešení pro libovolné $[t_0, x_0] \in \mathbb{R} \times G$. Řešením budeme rozumět úplné řešení, tj. řešení na maximálním intervalu.

Ke spojitosti vektorové funkce f , která zaručuje existenci řešení počáteční úlohy (A.1) pro libovolné x_0 přidáme podmínku lokální lipschitzovskosti funkce f , abychom zaručili jednoznačnost řešení. Potom trajektorie úplných řešení mají následující vlastnosti:

VĚTA A.1 *Uvažujme pouze úplná řešení soustavy (A.1) se spojitou funkcí $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Potom platí:*

1. *Trajektorie řešení je souvislá množina.*
2. *Je-li $x(t)$ úplné řešení definované na intervalu (a, b) , potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je vektorová funkce $x_c(t) = x(t - c)$ také úplné řešení na $(a + c, b + c)$ a má tutéž trajektorii.*
3. *Pokud $f(x)$ je navíc lipschitzovská, dvě úplná řešení mají buď disjunktní trajektorie nebo jejich trajektorie splývají (jsou totožné).*

DEFINICE A.2 *Trajektorie stacionárního (konstantního, singulárního) řešení $x(t) = x_0$ (x_0 je řešením soustavy rovnic $f(x) = 0$) je jednobodová množina $\{x_0\}$, která se nazývá singulární bod (také kritický bod, stacionární bod, rovnovážný bod nebo singulární trajektorie). Trajektorií periodického (nekonstantního) řešení $x(t)$ je uzavřená křivka, která se nazývá cyklus.*

Úplná řešení autonomní soustavy mají jen tři druhy trajektorií.

VĚTA A.3 *Uvažujme autonomní soustavu ODR (A.1) se spojitou lipschitzovskou funkcí $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Potom její úplná řešení $x(t)$ mají trajektorie pouze následujících tří druhů:*

1. *singulární bod - řešení $x(t)$ je konstantní,*
2. *cyklus, uzavřená křivka - řešení $x(t)$ je periodické, nekonstantní,*
3. *otevřená neprotínající se křivka - trajektorie řešení představuje prosté zobrazení otevřeného intervalu $I = (a, b)$ (včetně případů $a = -\infty$ nebo $b = \infty$) do fázového prostoru.*

Definiční obor G funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (na kterém je \mathbf{f} spojitá a lipschitzovská) v prostoru hodnot (fázovém prostoru) se tak rozpadá na

- *singulární body* - trajektorie konstantních řešení,
- *uzavřené křivky (cykly)* - trajektorie periodických řešení,
- *otevřené neprotínající se křivky* - trajektorie ostatních řešení.

Autonomní rovnice druhého řádu

Rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x) \quad (\text{A.2})$$

převědeme transformací $(x(t), \dot{x}(t)) \mapsto (x(t), y(t))$ na soustavu dvou rovnic

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y). \quad (\text{A.3})$$

Fázový prostor řešení $x(t)$ je rovina x, \dot{x} , do které vynášíme body se souřadnicemi hodnot řešení $x(t)$ a hodnot jeho derivace $\dot{x}(t)$, tj. $(x(t), \dot{x}(t))$. Fázový portrét řešení rovnice druhého řádu v rovině s osami x, \dot{x} jsou orientované křivky $\{(x(t), \dot{x}(t)) \in \mathbb{R}^2 | x \in I\}$. Nad osou x je derivace \dot{x} kladná a řešení je tedy rostoucí, proto jsou tyto trajektorie orientovány v kladném smyslu osy x . Pod osou x jsou z analogického důvodu trajektorie orientovány v záporném smyslu. Na ose x je derivace řešení $\dot{x} = 0$, proto trajektorie přecházejí osu x s kolmou tečnou. Protože navíc konstantní řešení x má nulovou derivaci \dot{x} , mohou se singulární body vyskytovat pouze na ose x .

DEFINICE A.4 (TYPY SINGULÁRNÍCH BODŮ V ROVINĚ) *Uvažujme trajektorie autonomní soustavy (A.3) se spojitými lipschitzovskými funkcemi f, g . Izolovaný singulární bod (x_0, y_0) nazveme*

střed *pokud každým bodem ryzího okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie typu uzavřené křivky - cyklus*

uzel *pokud každým bodem ryzího okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie $(x(t), y(t))$, $t \in (-\infty, \infty)$ typu otevřené křivky, která se limitně blíží pro $t \mapsto \infty$ [nebo $t \mapsto -\infty$] k singulárnímu bodu (x_0, y_0) , přičemž směrnice tečny trajektorie $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ má konečnou limitu.*

*Pokud se body $(x(t), y(t))$ blíží k bodu (x_0, y_0) při $t \mapsto \infty$, mluvíme o atraktivním (přitahujícím, přitažlivém) uzlu, pokud naopak body $(x(t), y(t))$ se blíží k bodu (x_0, y_0) při $t \mapsto -\infty$, tj. při $t \mapsto \infty$ se vzdalují, mluvíme o neatraktivním (odpu-
zujícím, odpudivém) uzlu.*

ohnisko *každým bodem ryzího okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie typu otevřené křivky, která se limitně blíží pro $t \mapsto \infty$ [nebo $t \mapsto -\infty$] k singulárnímu bodu (x_0, y_0) ,*

přičemž směrnice tečny řešení $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ nemá vlastní limitu (orientovaný úhel tečného vektoru neomezeně roste, případně neomezeně klesá).

Pokud se body $(x(t), y(t))$ blíží k bodu (x_0, y_0) při $t \mapsto \infty$, mluvíme o atraktivním (přitahujícím, přitažlivém) ohnisku, pokud body $(x(t), y(t))$ se blíží k bodu (x_0, y_0) při $t \mapsto -\infty$ (tj. při $t \mapsto \infty$ se řešení vzdaluje od singularity), mluvíme o neatraktivním (odpuzujícím, odpudivém) ohnisku.

sedlo pokud v ryzím okolí bodu (x_0, y_0) existují jak trajektorie, které se při rostoucím t blíží k (x_0, y_0) , tak trajektorie, které se při rostoucím t vzdalují od (x_0, y_0) .

Více lze nalézt v literatuře [4].

B ZDROJOVÝ KÓD POUŽITÉHO PROGRAMU

```
function f = pend(t,x)
global c amp omd

f = zeros(2,1);
f(1) = x(2);
f(2) = -sin(x(1)) - c*x(2) + amp*cos(omd*t);
-----

global c amp omd
c = 0;
%c = 0.25;
tmax=200;
amp=0;
omd=0;
tspan = [0 tmax];
x1=0;
x2=pi/2;
% ode45, fce pend, rozsah, pocatecni podminky
[t,x] = ode45(@pend, tspan, [x1 x2]);
% vytvoreni vektoroveho pole
[x1, x2] = meshgrid(-2*pi:0.8:2*pi, -4:0.8:4);
dx1 = x2;
dx2 = - sin(x1) - c*x2;
% vykresleni
plot(x(:,1),x(:,2),'b');hold on;
% nastaveni rozsahu os
axis([-2*pi 2*pi -4 4])
% vektorove pole
quiver(x1, x2, dx1, dx2,'r'); hold off;
popisky
xlabel('x'); ylabel('y');
-----

global c amp omd
c = 0.25;
amp =0.7;
omd =2/3;
pd=2*pi/omd;
tmax=1000;
tspan = [0 tmax];
op = odeset('RelTol',1.e-8);
%pocatecni podminky
x1=0;
x2=pi/2.;
% fazovy portret, prvnich 100*pd nevykreslit
[t,x] = ode45(@pend,[0 100*pd],[x1 x2],op);
lst = length(x(:,1));
x1 = x(lst,1); x2 = x(lst,2);
close all; figure(1); hold on; box on;
axis square; axis ([-pi pi -4 4]);
[t,x]=ode45(@pend,tspan,[x1 x2],op);
for i=ceil(min(x(:,1))/2/pi):ceil(max(x(:,1))/2/pi)
plot(x(:,1) - i*2*pi, x(:,2));hold on
end
%%popisky
xlabel('x'); ylabel('y');
hold off;
```

LITERATURA

- [1] BAKER, G.L., BLACKBURN, J.A. *The Pendulum: A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2005. 288 s.
- [2] BILLINGHAM, J., KING, A.C., OTTO, S.R. *Differential Equations: Linear, Non-linear, Ordinary, Partial*. Cambridge University Press, 2003. 541 s.
- [3] CHICONE, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. New York : Springer-Verlag, 1999. 561 s.
- [4] FRANČŮ, J. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Dostupné z URL: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu/>.
- [5] JANÍČEK, P. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky*. Brno : CERM; VUTTIUM, 2007.